Correction Devoir maison n°14

Exercice 1

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n^2+1}{2}.$$

1. (a) On montre par récurrence les propositions $\mathscr{P}_n : \{0 \leq u_n \leq 1\}$.
Initialisation : D'après l'énoncé $u_0 = 0$, donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
Hérédité : On suppose que la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un certain $n \geq 0$. On a donc

$$\begin{aligned} 0 \leq u_n \leq 1 &\Longrightarrow 0 \leq u_n^2 \leq 1 \\ &\Longrightarrow 1 \leq u_n^2 + 1 \leq 2 \\ &\Longrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{u_n^2+1}{2} \leq \frac{2}{2} \\ &\Longrightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 1 \end{aligned}$$

La proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie, $(\mathscr{P}_n)$ est héréditaire.
Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,1].}$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n^2+1}{2} - u_n \\ &= \frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{2} \\ &= \frac{(u_n-1)^2}{2} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$$

(c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1. On en déduit par le théorème de convergence monotone que

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente.}}$$

On note ℓ la limite de la suite (u_n). On a alors nécessairement

$$\begin{aligned} \ell = \frac{\ell^2+1}{2} &\Longleftrightarrow 2\ell = \ell^2 + 1 \\ &\Longleftrightarrow \ell^2 - 2\ell + 1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow (\ell-1)^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \ell = 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi } \lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = 1 - u_n$.

(a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} v_k - v_{k+1} &= 1 - u_k - (1 - u_{k+1}) \\ &= u_{k+1} - u_k \\ &= \frac{u_k^2 + 1}{2} - \frac{2u_k}{2} \\ &= \frac{(u_k - 1)^2}{2} \\ &= \frac{(-v_k)^2}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a donc } v_k - v_{k+1} = \frac{v_k^2}{2}}$$

(b) En reconnaissant une somme télescopique,

$$\sum_{k=0}^{n} (v_k - v_{k+1}) = v_0 - v_{n+1}$$

(c) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 - u_n = 0$. La série de terme général $v_n - v_{n+1}$ est convergente et

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n^2 = 2(v_n - v_{n+1})$$

Ainsi la série de terme général v_n^2 est convergent et

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^2 = 2(v_0 - 0) = 2.}$$

Exercice 2

Espaces Vectoriels

1. On cherche $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2\lambda_2 + 2\lambda_3 & = 4 \\ \lambda_1 + \lambda_3 & = -1 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 & = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2\lambda_2 + 2\lambda_3 & = 4 \\ \lambda_1 + \lambda_3 & = -1 \\ \lambda_2 & = -2 \quad L_3 \leftarrow L_2 - L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2\lambda_3 & = 8 \\ \lambda_1 & = -1 - \lambda_3 \\ \lambda_2 & = -2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_3 & = 4 \\ \lambda_1 & = -5 \\ \lambda_2 & = -2 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Le vecteur est bien combinaison linéaire des 3 autres vecteurs.}}$$

2. On montre que $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) | -x+2y+z=0 \text{ et } y+3z=2x \right\}$ est un espace vectoriel.

   On a
   - On a $F \subset \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   - On a $-0+2\times 0+0=0$ et $0+3\times 0 = 2\times 0$ donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in F$.
   - Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in F$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a donc les équations suivantes.

$$-x_1+2x_2+x_3=0 \quad \text{et} \quad x_2+3x_3=2x_1$$

$$-y_1+2y_2+y_3=0 \quad \text{et} \quad y_2+3y_3=2y_1$$

Or $\lambda X + Y = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + y_1 \\ \lambda x_2 + y_2 \\ \lambda x_3 + y_3 \end{pmatrix}$. On calcule alors

$$\begin{aligned} -(\lambda x_1+y_1)+2(\lambda x_2+y_2)+(\lambda x_3+y_3) &= -\lambda x_1 - y_1 + 2\lambda x_2 + 2y_2 + \lambda x_3 + y_3 \\ &= \lambda(-x_1+2x_2+x_3)+(-y_1+2y_2+y_3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lambda x_2+y_2+3(\lambda x_3+y_3) &= \lambda(x_2+3x_3)+(y_2+3y_3) \\ &= \lambda \times 2x_1 + 2y_1 \\ &= 2(\lambda x_1+y_1) \end{aligned}$$

On a donc $\lambda X + Y \in F$.

$\boxed{F \text{ est un sous espace vectoriel de } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}).}$

3. Dans $M_{3,1}(\mathbb{R})$ on considère les vecteurs : $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (a) On montre que (u,v,w) est une famille libre de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, tels que

$$\begin{aligned} \lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0 &\iff \begin{cases} 2\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_3 \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 &= 0 \\ 2\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \end{cases} \quad L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1 \\ &\iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{La famille } (u,v,w) \text{ est une famille libre de } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}).}$

On montre désormais que (u,v,w) est une famille génératrice de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on cherche $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que

$$\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = X \iff \begin{cases} \quad 2\lambda_2 + 2\lambda_3 & = x \\ \lambda_1 + \quad \lambda_3 & = y \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 & = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 & = z \\ \lambda_1 + \quad \lambda_3 & = y \quad L_1 \leftrightarrow L_3 \\ \quad 2\lambda_2 + 2\lambda_3 & = x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 & = z \\ \quad \lambda_2 & = y - z \quad L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1 \\ \quad 2\lambda_2 + 2\lambda_3 & = x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 & = z \\ \quad \lambda_2 & = y - z \\ \quad \lambda_3 & = \frac{1}{2}x - y + z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 & = z + y - z - \left(\frac{1}{2}x - y + z\right) \\ \lambda_2 & = y - z \\ \lambda_3 & = \frac{1}{2}x - y + z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 & = -\frac{1}{2}x + 2y - z \\ \lambda_2 & = y - z \\ \lambda_3 & = \frac{1}{2}x - y + z \end{cases}$$

On a donc $X = \left(-\frac{1}{2}x + 2y - z\right) u + (y-z)v + \left(\frac{1}{2}x - y + z\right) w.$

$$\boxed{\text{La famille } (u,v,w) \text{ est une famille génératrice de } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}).}$$

(b) On cherche λ_1, λ_2, λ_3 pour $X = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et donc

$$\boxed{\lambda_1 = -2 - 2 - 1 = -5, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = 4}$$

Exercice 3

On va remontrer dans cet exercice que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente sans utiliser les séries de Riemann.

1. On note la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}$. On a alors
   — La fonction f est dérivable sur $[k; k+1]$
   — Pour tout $x \in [k; k+1]$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}$
   D'après l'inégalité des accroissements finies

$$\boxed{\forall k \geq 1, \quad (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq \frac{1}{2\sqrt{k}} \Longleftrightarrow 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq \frac{1}{\sqrt{k}}}$$

2. En prenant la somme de chaque côté, on a

$$\sum_{k=1}^{n} 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

En reconnaissant une somme télescopique, on obtient

$$\boxed{2\sqrt{n+1} - 2 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.}$$

3. On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\sqrt{n+1} - 2 = +\infty$.

$$\boxed{\text{Par comparaison la série } \textstyle\sum_{n\geq 1} \text{ est divergente.}}$$

Exercice 4

Justifier la convergence des séries suivantes et calculer leur somme (pour $k \in \mathbb{N}$ fixé et $x \in \mathbb{R}$) :

1. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n(n-1)}{6^{n-2}}$ est un série géométrique dérivée convergente (car $\dfrac{1}{6} < 1$). La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n(n-1)}{6^{n}}$ est donc convergente et

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{6^n} = \frac{1}{36} \times \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{6}\right)^3} = \frac{2\times 6}{5^3} = \frac{12}{125}}$$

2. En passant par les sommes partielles

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k}$$

La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ est une série géométrique convergente (car $-1 < -1/2 < 1$). La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{2^n}$ est donc convergente et

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}}$$

3. En passant par les sommes partielles

$$\sum_{k=2}^{n} k(-1)^k x^{k-2} = \sum_{k=1}^{n-1} k(-x)^{k-2} - (-x)^{-1} = -\frac{1}{x} \sum_{k=1}^{n-1} k(-x)^{k-1} + \frac{1}{x}$$

La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n(-x)^{n-1}$ est une série géométrique convergente si et seulement si $-1 < x < 1$. $\forall x \in]-1;1[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} n(-1)^n x^{n-2}$ est <u>convergente</u> et

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} n(-1)^n x^{n-2} = -\frac{1}{x} \times \frac{1}{(1-(-x))^2} + \frac{1}{x} = -\frac{1}{x(1+x)^2} + \frac{1}{x}}$$

Sinon la série est <u>divergente</u>.